# Fiche du résumé des cours (2)

## *Dérivabilité*

### 1) Dérivabilité en un point

**Définition 1** :

On dit qu'une fonction $f$ est dérivable en $a$ si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie $l$ en $a$. Le nombre réel $l$ s'appelle le nombre dérivé de f en $a$ et se note $f'(a)$.

**Définition 2 : (Dérivabilité à gauche et dérivabilité à droite)**

- $f$ est dérivable à gauche en $a$ si $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et finie, on la note $f_g'(a)$
- $f$ est dérivable à droite en $a$ si $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et finie, on la note $f_d'(a)$

➢ **Remarques :**

- $f$ est dérivable en $a$ <u>si et seulement si</u> $f$ est dérivable à gauche et à droite en $a$ et $f_g'(a)=f_d'(a)$
- Si $f$ est dérivable en $a$ alors, $f$ est continue en $a$.
- La réciproque n'est pas toujours vraie.

### 2) Tangente à une courbe

- **Propriété** :

➢ Si $f$ est dérivable en $a$ alors la courbe $(C_f)$ admet au point $A(a, f(a))$ une tangente d'équation : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

- **Propriétés** :

➢ Si $f_g'(a) \neq f_d'(a)$ , alors $(C_f)$ admet au point $A(a, f(a))$ deux demi-tangentes , on dit que A est un point anguleux.

➢ Si $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$, alors $(C_f)$ admet à gauche du point $A(a, f(a))$ une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.

➢ Si $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$, alors $(C_f)$ admet à gauche du point $A(a, f(a))$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

- Si $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$, alors $(C_f)$ admet à droite du point $A(a, f(a))$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.
- Si $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$, alors $(C_f)$ admet à droite du point $A(a, f(a))$ une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.

**3) Dérivabilité sur un intervalle – fonction dérivée**

- **Définition**

- On dit que $f$ est dérivable sur un intervalle ouvert $I$, si $f$ est dérivable en tout point de $I$.
- On dit que $f$ est dérivable sur $[a,b]$ si $f$ est dérivable sur $]a,b[$ et dérivable à gauche en $a$ et à droite en $b$.
- On appelle fonction dérivée de $f$ la fonction qui à tout point $x$ de $D_f$ associe son nombre dérivé $f'(x)$ s'il existe. On la note $f'$

- **Opérations sur les fonctions dérivables**

**Théorème**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $I$, alors :

- Les fonctions $f+g$ ; $\alpha f$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ ; $f \times g$ ; $f^n$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) sont dérivables sur $I$ et on a :

| | |
|---|---|
| $(f+g)' = f' + g'$ | $(\alpha f)' = \alpha f'$ |
| $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$ | $(f^n)' = n \times f^{n-1} \times f'$ |

- Si $(\forall x \in I)\ g(x) \neq 0$ , alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur $I$ et on a :

| | |
|---|---|
| $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$ | $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$ |

- Si $f$ est strictement positive sur $I$, alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur $I$ et on a : $\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

- **Dérivée de fonctions usuelles**

| **Fonction** | **Fonction dérivée** | $D_f$ | $D_{f'}$ |
|---|---|---|---|
| $k$ ($k$ une constante) | $0$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| $x$ | $1$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\frac{-1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\mathbb{R}^+$ | $]0,+\infty[$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\tan x$ | $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ | $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ |
| $\sin(ax+b)$ ; $(a \neq 0)$ | $a\cos(ax+b)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos(ax+b)$ ; $(a \neq 0)$ | $-a\sin(ax+b)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\tan(ax+b)$ ; $(a \neq 0)$ | $a\left[1+\tan^2(ax+b)\right] = \frac{a}{\cos^2(ax+b)}$ | $\left\{x \in \mathbb{R} / ax+b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$ | $D_{f'} = D_f$ |

- **Applications de la dérivation**

**Théorème 1**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ .

- Si sa dérivée $f'$ est strictement positive sur $I$ (sauf éventuellement en des points isolés) alors $f$ est strictement croissante sur $I$ .
- Si sa dérivée $f'$ est strictement négative sur $I$ (sauf éventuellement en des points isolés) alors $f$ est strictement décroissante sur $I$ .
- Si $f'$ est nulle sur $I$ alors $f$ est constante sur $I$ .

**Théorème 2**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I$ et $a \in I$ .

$f$ admet un extrémum en $a$ ssi $f'$ s'annule en $a$ en changeant de signe

## 4) Dérivée d'une fonction composée

**Théorème**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions dérivables respectivement en $a$ et $f(a)$ , alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en $a$ et on a : $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$

## 5) Dérivée d'une fonction réciproque

- **Théorème**

Soit $f$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I$ et $f(I) = J$ et $f^{-1}$ sa fonction réciproque .si $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) \neq 0$ alors : $f^{-1}$ est dérivable en $b = f(a)$ et on a :

$\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$ càd $\left(f^{-1}\right)'\left(f(a)\right) = \dfrac{1}{f'(a)}$

- **Propriété 1**

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$\left(\forall x \in ]0,+\infty[\right) \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$$

- **Propriété 2**

  Si $u$ est une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $(\forall x \in I) : u(x) > 0$ alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur $I$ et on a : $(\forall x \in \mathrm{I})$ $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$

- **Théorème**

➢ $x \mapsto x^r$ où $r \in \mathbb{Q}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a : $\left(\forall x \in ]0,+\infty[\right) : \left(x^r\right)' = rx^{r-1}$

➢ Si $u$ est une fonction dérivable sur un intervalle I et $(\forall x \in I)$ $u(x) > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$ , alors : la fonction $x \mapsto u(x)^r$ est dérivable sur I et on a : $(\forall x \in I)$ $\left((u(x))^r\right)'(x) = r\left(u(x)\right)^{r-1}.u'(x)$